Занятие номер	Класс	Тема
2	6 база	Четность. Чередования. Часть 3.

1. Решение.

Так как в ряду натуральных чисел четные и нечетные числа чередуются, то возможны две ситуации.

1) Первое из рассматриваемых чисел – четное. Тогда a – это сумма двух четных и одного нечетного числа, b – это сумма двух нечетных и одного четного числа. Значит, a – нечетное число, b – четное число. Тогда произведение нечетного a и четного b четно.
2) Первое из рассматриваемых чисел – нечетное. Тогда a – это сумма двух нечетных и одного четного числа, b – это сумма двух четных и одного нечетного числа. Значит, a – четное число, b – нечетное число. Тогда произведение четного a и нечетного b четно.

Как видим, в обоих случаях произведение a и b четно, значит, не может равняться нечетному числу 2525.

Ответ: не может.

2. Решение.

Так как разность количества грибов Коли и Пети равна 4, то есть четному числу, то и сумма их грибов тоже четна. Так как разность количества грибов Лены и Ани равна 6, то есть четному числу, то и сумма их грибов тоже четна. Общее количество грибов – сумма грибов мальчиков и девочек, то есть сумма двух четных чисел. Значит, общее количество грибов четно и не может быть равно нечетному числу 75.

Ответ: не может.

3. Решение.

Оценка.

Все 6 рассказов начинаться с нечетной страницы не могут. Действительно, есть хотя бы два рассказа нечетного объёма, которые не являются последними в книге. Значит, если рассказ нечетного объёма начинается с нечетной страницы (а значит, и заканчивается на нечетной странице), то следующий за ним рассказ начинается с четной страницы.

Таким образом, рассказов, начинающихся с нечетной страницы, - не более 5.

Пример.

Пусть рассказы соответствующего объема расположены в книге так: 2, 4, 6, 1, 3, 5.

При таком расположении рассказы начинаются со страниц 1, 3, 7, 13, 14, 17 – всего 5 рассказов начинаются с нечетной страницы.

Ответ: 5 рассказов.

4. Доказательство.

Объединим стоящих подряд мальчиков в группу «мальчики», а стоящих подряд девочек в группу «девочки». Эти группы расположены по кругу и чередуются, значит, групп «мальчики» столько же, сколько групп «девочки», а общее количество групп – четное. Количество рукопожатий между мальчиком и девочкой равно количеству промежутков между каждыми двумя соседними группами (так как только в этих промежутках за руки держатся мальчик и девочка). Промежутков столько же, сколько групп, значит, их четное количество. Значит, количество рукопожатий между мальчиком и девочкой четно.

Доказано.

5. Доказательство.

Пусть даны числа a, b, c, d, e.

По условию, суммы a+b+c, a+b+d, a+b+e четны. Представим эти суммы в виде суммы двух слагаемых так: (a+b)+c, (a+b)+d, (a+b)+e. Сумма двух слагаемых четна только тогда, когда слагаемые имеют одинаковую четность. Значит, числа (a+b), c, d и e – это числа одинаковой четности.

Так как, по условию, сумма c+d+e четна, а числа c, d и e имеют одинаковую четность, то числа c, d и e четные (иначе, если они все нечетные, их сумма тоже нечетна).

По условию, суммы d+e+c, d+e+b, d+e+a четны. Представим эти суммы в виде суммы двух слагаемых так: (d+e)+c, (d+e)+b, (d+e)+a. Сумма двух слагаемых четна только тогда, когда слагаемые имеют одинаковую четность. Значит, числа (d+e), c, b и a – это числа одинаковой четности.

Так как, по условию, сумма c+b+a четна, а числа c, b и a имеют одинаковую четность, то числа c, b и a четные (иначе, если они все нечетные, их сумма тоже нечетна).

Так как числа c, d и e четные и числа c, b и a четные, то все пять чисел четные.

Доказано.

6. Решение.

Среди чисел от 1 до 100 всего 100 чисел, четных и нечетных среди них поровну, то есть по 50. Так как нечетных чисел четное количество, то сумма чисел от 1 до 100 является четной.

Допустим, что могло оказаться так, что суммы чисел в любых двух соседних столбцах таблицы отличаются на 1. Тогда в таблице чередуются столбцы с четными и нечетными суммами. Так как в таблице всего 10 столбцов, то 5 из них имеют четную сумму чисел, 5 – нечетную. Тогда сумма чисел во всей таблице равна сумме чисел в столбцах и содержит 5 четных и 5 нечетных слагаемых. Так как нечетных слагаемых нечетное количество, то сумма чисел во всех столбцах (и во всей таблице) нечетная. А это противоречит тому, что сумма чисел во всей таблице четна.

Значит, предположение неверно, и не могло оказаться так, что суммы чисел в любых двух соседних столбцах отличаются на 1.

Ответ: не могло.

7. Доказательство.

Разобьем весь путь на вертикальные и горизонтальные отрезки длины 1. Будем двигаться из какой-нибудь точки вдоль этого пути, пока не вернемся в начальную точку.

Так как путь замкнутый, то в нем горизонтальных отрезков, пройденных в направлении слева направо и в направлении справа налево, поровну (иначе невозможно вернуться в начальную точку). Аналогично, вертикальных отрезков, пройденных в направлении снизу вверх и сверху вниз, поровну. Значит, количество горизонтальных отрезков в этом пути четно (так как оно представляет собой сумму двух одинаковых количеств) и количество вертикальных отрезков четно.

Длина всего пути – сумма длин всех горизонтальных и вертикальных отрезков, она равна сумме двух четных чисел, а значит, является четной.

Доказано.

Домашнее задание 2. (*Сдается письменно на отдельном листе)*

Решение.

а) В этой сумме всего 101–10=91 слагаемое, нечетных на 1 больше, чем четных. Значит, всего в этой сумме (91–1):2=45 четных слагаемых и 45+1=46 нечетных слагаемых. Так как нечетных слагаемых всего 46 (то есть четное количество), то вся сумма четная.

б) Определим количество слагаемых в этой сумме. Это можно сделать так. Пусть все числа – это точки на числовой прямой. Расстояние между первой и последней точками равно 703–21=682. Расстояние между каждыми двумя соседними точками равно 2. Значит, всего от первой до последней точки есть 682:2=341 промежуток длины 2. А тогда самих точек на 1 больше, то есть 342.

Как видим, все 342 числа в этой сумме являются нечетными. Так как нечетных слагаемых четное количество, то и вся сумма четная.

в) Определим количество слагаемых в этой сумме. Пусть все числа – это точки на числовой прямой. Расстояние между первой и последней точками равно 205–1=204. Расстояние между каждыми двумя соседними точками равно 3. Значит, всего от первой до последней точки есть 204:3=68 промежутков длины 3. А тогда самих точек на 1 больше, то есть 69.

Как видим, в сумме четные и нечетные слагаемые чередуются. Первое и последнее слагаемое – нечетные, а всего слагаемых 69. Значит, нечетных среди них будет на 1 больше, чем четных, а именно (69–1):2+1=35.

Так как нечетных слагаемых нечетное количество, то и вся сумма нечетная.

г) В этой сумме всего (1001–501):4+1=126 слагаемых, все они нечетные. Нечетных слагаемых четное количество, значит, вся сумма четная.

д) В этой сумме всего (701–25):4+1=170 слагаемых, все они нечетные. Нечетных слагаемых четное количество, значит, вся сумма четная.
Ответ: а) четная, б) четная, в) нечетная, г) четная, д) четная.