Занятие номер	Класс	Тема
2	8 профи	Неравенства.

A > B тогда и только тогда, когда A – B > 0.

A < B тогда и только тогда, когда A – B < 0.

A = B тогда и только тогда, когда A – B = 0.

Для доказательства каждого базового неравенства мы будем сравнивать с нулем разность левой и правой части неравенства.

Кроме того, будем использовать такие факты:

$A^2 \geq 0$ при любом A.

Если A > B, а B > C, то A > C.

Если A > B, то A + c > B + c, где c – любое число.

Если A > B, то $A \cdot d > B \cdot d$, где d – любое положительное число.

Если A > B и C > D, то A + B > C + D.

Если A > B > 0 и C > D > 0, то $A \cdot B > C \cdot D$.

Базовые неравенства

1. Доказательство.

$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$

Квадрат любого числа ≥ 0, значит, $(x - y)^2 \geq 0$, значит, $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, значит, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Доказано.

2. Доказательство.

$x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

Доказано.

3. Доказательство.

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy}$

Так как $x>0$, $y>0$, $(x-y)^2 \geq 0$, то $\frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$.

Доказано.

4. Доказательство.

$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+y)}=\frac{x+y}{xy}-\frac{4}{(x+y)}=\frac{(x+y)^2}{xy(x+y)}-\frac{4xy}{xy(x+y)}=\frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2+y^2+2xy-4xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$

Так как x>0, y>0, (x+y)>0, $(x–y)^2 \geq 0$, то $\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \geq 0$.

Доказано.

5. Доказательство.

По базовому неравенству 2:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

Так как числа a, b и c неотрицательные, то:

$\boldsymbol{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8\sqrt{abbcca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = \boldsymbol{8abc}$.

Доказано.

6. Доказательство.

По базовому неравенству 1:

$x^2 + y^2 \geq 2xy$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$.

Тогда:

$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2} = ½ (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = ½ ((x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (x^2 + z^2)) \geq ½ (2xy + 2yz + 2xz) = \mathbf{xy + yz + xz}$.

Доказано.

7. Доказательство.

В неравенстве 6 примем z за 1, получим:

$x^2 + y^2 + 1^2 \geq xy + y\cdot 1 + x\cdot 1$, или $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Доказано.

8. Доказательство.

Докажем сначала, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}$, или $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$.

По базовому неравенству 1:

$x^2 + y^2 \geq 2xy$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$.

Тогда:

$\mathbf{3(x^2 + y^2 + z^2)} = ((x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2)) + (x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2xz + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2) = \mathbf{(x + y + z)^2}$.

Докажем теперь, что $\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqslant xy + yz + xz$, или $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$.

По базовому неравенству 1:

$x^2 + y^2 \geq 2xy$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$.

Тогда:

$\mathbf{(x + y + z)^2} = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = ½(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) + 2xy + 2xz + 2yz = ½((x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2)) + 2xy + 2xz + 2yz \geq ½(2xy + 2xz + 2yz) + 2xy + 2xz + 2yz = xy + xz + yz + 2xy + 2xz + 2yz = \mathbf{3(xy + yz + xz)}$.

Доказано.

9. Доказательство.

Пусть a и b – стороны прямоугольника, P – его периметр. Обозначим буквой p полупериметр прямоугольника, тогда $a + b = p$.

Пусть $a = p - x$, тогда $b = p + x$, где $0 \leq x < p$.

Площадь прямоугольника равна $S = a \cdot b = (p - x)(p + x) = p^2 - x^2$. Так как p – фиксированное число, то площадь максимальна тогда, когда x^2 минимально, то есть когда $x = 0$. В этом случае $a = b = ½p$, то есть прямоугольник является квадратом.

Доказано.