Занятие номер	Класс	Тема
1	8 база	ОТА. НОД и НОК. Часть 1

Решение.

а) Так как 81 делится на 9, то НОД(9, 81)=9, НОК(9, 81)=81;

б) $30=2\cdot3\cdot5$, $75=3\cdot5^2$. НОД$(30, 75)=3\cdot5=15$, НОК$(30, 75)=2\cdot3\cdot5^2=150$;

в) Так как $121=11^2$, а число 1534569 на 11 не делится, то НОД(121, 1534569)=1.

$24=2^3\cdot3$, $85=5\cdot17$. НОК$(24, 85)=2^3\cdot3\cdot5\cdot17=24\cdot85=2040$;

г) НОД$(2^3\cdot3^{15}\cdot7^{19}, 2^{31}\cdot3^2\cdot11^3)=2^3\cdot3^2=72$; НОК$(2^3\cdot3^2\cdot5^2, 2^2\cdot3^3\cdot5^3)=2^3\cdot3^3\cdot5^3=27000$.

Ответ: см. решение.

1. Решение.

а) $56=2\cdot2\cdot2\cdot7$, $112=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7$.

Изобразим множества простых множителей искомых чисел в виде кругов Эйлера. Произведение чисел из *пересечения* этих множеств – это НОД искомых чисел, а произведение чисел из *объединения* этих множеств – это НОК искомых чисел.

Значит, простые множители искомых чисел могут располагаться только так, как на схеме. Отсюда получаем, что одно из искомых чисел равно $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7=112$, другое - $2\cdot2\cdot2\cdot7=56$.

б) $18=2\cdot3\cdot3$, $630=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$.

Изобразим множества простых множителей искомых чисел в виде кругов Эйлера. Произведение чисел из *пересечения* этих множеств – это НОД искомых чисел, а произведение чисел из *объединения* этих множеств – это НОК искомых чисел.

Простые множители искомых чисел могут располагаться двумя способами, как показано на схемах. В первом случае искомые числа равны $2\cdot3\cdot3\cdot5=90$ и $2\cdot3\cdot3\cdot7=126$, во втором случае – $2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7=630$ и $2\cdot3\cdot3=18$.

Ответ: а) 56 и 112, б) 90 и 126, 18 и 630.

2. Решение.

Пусть Ваня получил число a, Саша получил число b.

Произведение любых двух натуральных чисел a и b равно произведению их НОД и НОК (обсуждалось на теории): $a\cdot b=$НОД$(a, b)\cdot$НОК(a,b).

А произведение $a\cdot b$ равно произведению трёх чисел 5 и четырёх чисел 2. Значит, учительница назвала число $5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2000$.

Ответ: 2000.

3. Решение.

Заметим, что среди двузначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 1 и 9, есть, например, простые числа 19 и 29. Их НОД равен 1. Значит, и НОД всех двузначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 1 и 9, равен 1.

Ответ: 1.

4. Решение.

НОК двух чисел делится на каждое из этих чисел, а значит, и на любой делитель этих чисел, в том числе и на НОД.

35 на 12 не делится, значит, Евсей ошибся.

Ответ: ошибся.

5. Решение.

$45^n=3^{2n}\cdot 5^n$, $75^{10}=3^{10}\cdot 5^{20}$.

Значит, чтобы 45^n делилось нацело на 75^{10}, нужно, чтобы 2n было не меньше 10, а n – не меньше 20. Наименьшее n, для которого выполняются оба эти условия, равно 20.

Ответ: 20.

6. Доказательство.

Пусть даны натуральные числа a и b, причем a>b.

Обозначим их НОД буквой d, тогда их НОК равен 27d.

Числа a и b можно представить в виде: a=d•n, b=d•k, где n и k – взаимно простые числа (обсуждалось на теории), причем n>k. Тогда $a\bullet b=d^2\bullet n\bullet k$.

С другой стороны, произведение чисел a и b равно произведению их НОД и НОК (обсуждалось на теории): $a\bullet b=d\bullet 27d=27d^2$.

Из равенства $d^2\bullet n\bullet k=27d^2$ получаем, что n•k=27.

Так как 27=1•27=3•9, а числа n и k – взаимно простые, и n>k, то n=27, k=1.

Тогда a=27d, b=d, отсюда получаем, что a=27b, а это значит, что a делится на b.

Доказано.

7. Решение.

Число 1000 можно представить в виде произведения двух чисел таким образом:

1000=1*1000=2*500=4*250=5*200=8*125=10*100=20*50=25*40.

НОД этих чисел в этих случаях равен 1, 2, 2, 5, 1, 10, 10, 5 соответственно.

Наибольшее возможное значение НОД двух чисел, произведение которых равно 1000, - это 10.

Ответ: 10.

Домашнее задание 1.

1. Доказательство.

Пусть даны натуральные числа a и b, причем a>b.

Обозначим их НОД буквой d, тогда их НОК равен 75d.

Числа a и b можно представить в виде: a=d•n, b=d•k, где n и k – взаимно простые числа (обсуждалось на теории), причем n>k. Тогда $a•b=d^2•n•k$.

С другой стороны, произведение чисел a и b равно произведению их НОД и НОК (обсуждалось на теории): $a•b=d•75d=75d^2$.

Из равенства $d^2•n•k=75d^2$ получаем, что n•k=75.

Так как 75=1•75=3•25=5•15, а числа n и k – взаимно простые, и n>k, то n=75, k=1 или n=25, k=3. Рассмотрим оба эти случая.

В первом случае a=75d, b=d, отсюда получаем, что a=75b>8b.

Во втором случае a=25d, b=3d, отсюда получаем, что a>24d=8•(3d)=8b, то есть a>8b.

Доказано.

2. Решение.

Делители числа 319: 1, 11, 29, 319. То есть все тетради можно разбить на 1, 11, 29 или 319 наборов.

Делители числа 174: 1, 2, 3, 29, 87, 174. То есть все карандаши можно разбить на 1, 2, 3, 29, 87 или 174 наборов.

Так как во всех наборах было одинаковое число тетрадей и одинаковое число карандашей, то количество наборов – это общий делитель чисел 319 и 174. Их два – 1 и 29. Но так как наборов было несколько, то их было 29. В каждом наборе было 319:29=11 тетрадей и 174:29=6 карандашей.

Ответ: всего 29 наборов, в каждом 11 тетрадей и 6 карандашей.

8 класс база. ОТА, НОД и НОК. Часть 2.

1. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

   Решение.

   Пусть на острове Невезения в сутках n часов, в часе m минут, а в минуте k секунд.

   Тогда $n \cdot m=77$, $m \cdot k=91$, откуда понятно, что m – это общий делитель чисел 77 и 91.

   Делители числа 77 – это 1, 7, 11, 77. Делители числа 91 – это 1, 7, 13, 91.

   Значит, m=7. Тогда n=11, k=13. То есть на острове в сутках 11 часов, в часе 7 минут, в минуте 13 секунд.

   Всего в сутках 11*7*13=1001 секунда.

   Ответ: 1001 секунда.

2. Что больше, НОК всех чисел от 1 до 1000, или НОК всех чисел от 501 от 1000 и во сколько раз?

   Решение.

   НОК(501, …, 1000) – наименьшее число, которое делится на каждое из чисел от 501 до 1000. НОК (1, …, 1000) также делится на каждое из чисел от 501 до 1000 и еще на каждое из чисел от 1 до 500. Значит, НОК (1, …, 1000) ≥ НОК(501, …, 1000).

   Заметим, что для любого числа от 1 до 500 найдется кратное ему число от 501 до 1000. Действительно, для любого натурального числа $1 \le a \le 500$ можно подобрать такое натуральное число n, что $501 \le a \cdot n \le 1000$ (если это не так, то есть для некоторого n будет $a \cdot n<500$, а $a \cdot (n+1)>1000$, то это значит, что число $a>500$, противоречие).

   Значит, НОК(501, …, 1000) делится на каждое из чисел от 1 до 1000, то есть является общим кратным чисел от 1 до 1000. А так как НОК (1, …, 1000) ≥ НОК(501, …, 1000), то НОК(501, …, 1000) – это наименьшее общее кратное чисел и от 1 до 1000 тоже. То есть НОК (1, …, 1000) = НОК(501, …, 1000).

   Ответ: равны.

3. Теперь Евсей взял три числа *a*, *b* и *c* и посчитал НОД(*a*, *b*), НОД(*a*, *c*) и НОД(*b*, *c*). У него получились такие результаты: 175, 225, 65. Докажите, что и на этот раз Евсей где-то ошибся.

   Доказательство.

   Разложим на простые множители все НОДы:

   НОД (a, b) = 175 $=5^2 \bullet 7$.

   НОД (a, c) = 225 = $3^2 \bullet 5^2$.

   НОД (b, c) = 65 = $5 \bullet 13$.

   Так как 5^2 входит в НОД (a, b) и в НОД (a, c), то 5^2 входит в разложение на простые множители чисел a, b и c. Но тогда 5^2 должно входить в НОД (b, c), а в него входит только 5. Получили противоречие. Значит, Евсей где-то ошибся.

   Доказано.

4. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2000?

Решение.

Разложим 2000 на простые множители: $2000=2^4\cdot 5^3$.

Во-первых, число 2000 является НОК для всех пар чисел, одно из которых 2000, а второе – любой делитель числа 2000. У числа 2000 всего 20 делителей (1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000). Значит, есть 20 таких пар.

Во-вторых, число 2000 является НОК для пар чисел $2^n\cdot 5^3$ и $2^4\cdot 5^m$, где n=0, 1, 2, 3, m=0, 1, 2. Всего можно составить $4\cdot 3=12$ таких различных пар.

Таким образом, существует всего 20+12=32 различных пары чисел, у которых НОК равно 2000.

Ответ: 32 пары.

5. Ксюша взяла четыре натуральных числа. Для каждой пары она посчитал их: а) НОД; б) НОК; Могло ли у нее получиться 6 последовательных натуральных чисел?

Решение.

Среди шести последовательных чисел есть ровно 2 числа, делящихся на 3.

а) Предположим, что существуют такие числа a, b, c и d, что их попарные НОДы – шесть последовательных чисел. Тогда среди этих НОДов ровно 2 делятся на 3. Если, например, НОД (a, b) и НОД (a, d) делятся на 3, то НОД (b, d) делится на 3. А если НОД (a, b) и НОД (c, d) делятся на 3, то все попарные НОДы делятся на 3. Таким образом, получили противоречие: не может быть среди попарных НОДов ровно двух, делящихся на 3.

б) Предположим, что существуют такие числа a, b, c и d, что их попарные НОКи – шесть последовательных чисел. Тогда среди этих НОКов ровно 2 делятся на 3. Если среди чисел a, b, c и d нет делящихся на 3, то ни один из попарных НОКов не делится на 3. Если среди чисел a, b, c и d есть хотя бы одно, делящееся на 3, то НОКов, делящихся на 3, – не меньше трех (для каждой из трех пар с этим числом). Таким образом, получили противоречие: не может быть среди попарных НОКов ровно двух, делящихся на 3.

Ответ: не могло в обоих случаях.

6. Найдите НОД(99!+100!, 101!).

Решение.

$99!+100! = 99!\cdot(1+100)=99!\cdot 101$

$101! = 99!\cdot 100\cdot 101$

Как видим, число 101! делится на число 99!+100!, значит, НОД(99!+100!, 101!) = 99!+100! = $99!\cdot 101$.

Ответ: $99!\cdot 101$.

7. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Назовем натуральное число *удивительным*, если самый большой его собственный делитель на 1 больше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все *удивительные* числа и докажите, что других нет.

Решение.

Пусть a – наименьший собственный делитель удивительного числа P, тогда парный ему наибольший собственный делитель – это P/a. Так как P удивительное, то $a^2+1=P/a$. Отсюда получаем, что $P=a^3+a=a(a^2+1)$. Заметим, что при любых натуральных a значение этого выражения четно. Значит, P четно, и его наименьший собственный делитель равен 2. Тогда $P=2\cdot(2^2+1)=10$. Это единственное удивительное число.

Ответ: 10.