

6 база. Четность, чередования. Часть 2.

1. Решение.

На Васиных карточках написаны числа 2 и 4.

Действительно, среди чисел от 1 до 5 есть 2 четных и 3 нечетных числа. Если Васе достались 2 нечетных числа, то Коле могли достаться 2 четных или четное и нечетное, точно определить невозможно. Соответственно, сумма чисел у Коли могла быть четной или нечетной. Если Васе достались четное и нечетное числа, то Коле могли достаться два нечетных или четное и нечетное. Соответственно, сумма чисел у Коли могла быть четной или нечетной.

Значит, Васе достались 2 четных числа, а Коле – два нечетных, и сумма у Коли четная. Только в этом случае Вася мог наверняка определить четность суммы чисел Коли.

Ответ: 2 и 4.

2. Решение.

Четность суммы нескольких чисел зависит от четности количества нечетных слагаемых.

Назовем коробку «четной», если в ней четное количество конфет, и «нечетной», если нечетное.

а) 11 – нечетное число. Выберем среди 11 коробок все «нечетные».

Если таких коробок четное количество, то оставшихся «четных» коробок – нечетное количество ($11 - \text{Ч} = \text{Н}$), то есть хотя бы 1 «четная» коробка есть. Пусть Настя возьмет эту коробку себе, тогда сумма конфет в оставшихся коробках будет четной, так как «нечетных» коробок четное количество.

Если же «нечетных» коробок нечетное количество, то пусть Настя возьмет одну из них себе, тогда сумма конфет в оставшихся коробках будет четной, так как «нечетных» коробок останется четное количество.

Таким образом, в любом случае Настя может одну коробку полностью взять себе, а оставшиеся конфеты разделить поровну между своими двумя братьями.

б) Если в каждой из 10 коробок содержится нечетное количество конфет, то какую бы коробку Настя ни взяла, оставшихся «нечетных» коробок будет 9 (нечетное количество). Сумма конфет в оставшихся коробках будет нечетной, и Настя не сможет поровну разделить их между двумя братьями.

Если же среди 10 коробок есть нечетное количество «нечетных» коробок, то Настя может взять одну из них, тогда в оставшихся коробках в сумме будет четное количество конфет, и их можно будет разделить поровну между двумя братьями.

Ответ: а) всегда, б) не всегда.

3. Доказательство.

Рассмотрим три случая.

1) Если все числа в круге нечетные, то их сумма нечетная. Если убрать любые два соседних числа, то в круге останется 99 нечетных чисел. Их сумма нечетная, а значит, они не могут быть разбиты на две группы с равной суммой.

2) Если в круге есть и четные, и нечетные числа, то найдутся два числа разной четности, стоящие рядом. Кроме того, так как чисел в круге 101, то найдутся два числа одинаковой четности, стоящие

рядом (в противном случае четные и нечетные числа в круге чередуются, и их четное количество, а это противоречит тому, что их 101).

Если сумма всех чисел нечетная, то уберем из круга два соседних числа одинаковой четности. При этом в круге останется 99 чисел, сумма которых нечетна, а значит, они не могут быть разбиты на две группы с равной суммой.

Если сумма всех чисел четная, то уберем из круга два соседних числа разной четности. При этом в круге останется 99 чисел, сумма которых нечетна, а значит, они не могут быть разбиты на две группы с равной суммой.

3) Если в круге все числа четные, разделим все числа на 2. Заметим, что при этом, если некоторые 99 чисел в исходном круге можно разбить на две группы с равной суммой, то и в новом круге соответствующие им 99 чисел можно разбить на 2 группы с равной суммой.

Если в новом круге есть хотя бы одно нечетное число, то получаем случай 1) или 2). Если в новом круге все числа четные, то снова разделим все числа на 2. И так до тех пор, пока в круге не окажется хотя бы одно нечетное число. В любом случае, как доказано случаям в 1) и 2), в этом круге найдутся два соседних числа, убрав которые, оставшиеся 99 чисел невозможно разбить на группы с равной суммой. Значит, в исходном круге этим числам соответствуют те два числа, убрав которые, оставшиеся 99 чисел невозможно разбить на группы с равной суммой.

Доказано.

4. Решение.

В развороте книги номер левой страницы всегда четный, номер правой страницы нечетный. Значит, номер первой страницы после выпавшего куска – нечетный.

Из цифр 274 можно составить нечетные числа 247 и 427. Так как номер страницы после выпавшего куска должен быть больше номера страницы перед выпавшим куском, то подходит только число 427.

Итак, выпали страницы с 275 по 426, это $426-274=152$ страниц или $152:2=76$ листов.

Ответ: 76 листов.

5. Решение.

На 25 листах есть 25 нечетных и 25 четных номеров страниц. Значит, сумма страниц на 25 листах нечетная, и быть равной 1000 не может, так как 1000 – четное число.

Ответ: ошибся.

6. Решение.

а) Предположим, существуют числа a , b и c такие, что

$$a+b=116,$$

$$a+c=117,$$

$$b+c=118.$$

Так как сумма a и b – четное число, то числа a и b одной четности (либо оба четные, либо оба нечетные).

Так как сумма b и c – четное число, то числа b и c одной четности (либо оба четные, либо оба нечетные).

Таким образом, из 1-го и 3-го равенств следует, что числа a , b и c одной четности. Но тогда $a+c$ – это четное число и не может равняться 117. Получили противоречие. Значит, таких чисел не существует.

б) Предположим, существуют числа a , b и c такие, что

$$a+b=117,$$

$$a+c=118,$$

$$b+c=119.$$

Сложим эти три равенства, получим:

$$a+b+a+c+b+c=117+118+119,$$

$$\text{или } 2(a+b+c)=354,$$

$$\text{откуда получаем, что } a+b+c=177.$$

Если $a+b+c=177$, $a+b=117$, то $c=60$. Если $a+b+c=177$, $a+c=118$, то $b=59$. Если $a+b+c=177$, $b+c=119$, то $a=58$.

Таким образом, мы нашли три числа, попарные суммы которых равны 117, 118 и 119.

Ответ: а) нет, б) да (58, 59, 60).

7. Решение.

Любая степень числа 7 является нечетным числом.

Допустим, что мы смогли найти числа a , b , c и d , что сумма любых двух из них является степенью семерки. Тогда $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$ – нечетные числа.

Если $a+b$ нечетное число, то одно из слагаемых этой суммы четно, другое нечетно. Пусть a – четное, b – нечетное. Тогда, так как $a+c$ – нечетное число, a – четное число, то c – нечетное. Но тогда, так как b – нечетное и c – нечетное, сумма $b+c$ – четное число. А по нашему предположению, все попарные суммы чисел нечетны.

Значит, предположение неверно, и нельзя найти такие четыре натуральных числа, что сумма любых двух из них является степенью семерки. Заметим, что нельзя найти даже три таких числа.

Ответ: нельзя.

8. Решение.

Будем отмечать положение Васи в виде точки на прямой, вдоль которой он идет. Примем точку, из которой Вася начал движение, за 0, а длину шага Васи – за расстояние между соседними числами. Координата Васи после N ходов – это значение выражения, составленного из N первых натуральных чисел с помощью знаков «+» и «-». Четность этого выражения зависит от четности количество нечетных чисел среди этих N чисел.

После 1010-го хода, когда Вася сделает 1010 шагов, его координата – это выражение, составленное из первых 1010 натуральных чисел. Среди этих чисел половина четные, половина нечетные. То есть в этом выражении есть $1010:2=505$ четных и 505 нечетных чисел. Так как нечетных чисел нечетное количество, то значение выражение после 1010-го хода будет нечетным. Значит, Вася не сможет оказаться в точке 0, так как 0 – четное число.

Ответ: не сможет.

9. Доказательство.

Среди чисел от 2 до 18 есть 9 четных чисел и 8 нечетных. Значит, среди двух наборов чисел от 2 до 18 есть 18 четных и 16 нечетных.

Предположим, что произведение сумм чисел на карточках нечетно. Тогда сумма чисел на каждой карточке нечетна. Это значит, что на каждой карточке написано четное и нечетное число. Если на каждой карточке написано четное и нечетное число, то на всех карточках четных и нечетных чисел написано поровну. Это противоречит тому, что четных чисел написано 18, а нечетных 16.

Значит, наше предположение неверно, и произведение сумм чисел всех карточек четно.

Доказано.

10. Доказательство.

Из условия задачи следует, что сумма весов гирек, за исключением любой одной гирьки, является четным числом.

Предположим, что в наборе четное количество гирек. Тогда, если из набора убрать гирьку в 1г, то сумма весов оставшихся гирек (их будет нечетное количество) четна. Это значит, что среди оставшихся гирек есть четное количество гирек с нечетным весом и нечетное количество гирек с четным весом. Тогда во всем наборе, вместе с гирькой 1г, нечетное количество гирек с нечетным весом и нечетное количество гирек с четным весом. Но тогда, если убрать гирьку с четным весом (а она точно есть, так как гирек с четным весом нечетное количество), то сумма весов оставшихся гирек будет нечетной, и их нельзя будет разделить на две группы равного веса.

Получили противоречие. Значит, предположение неверно, и в наборе нечетное количество гирек.

Доказано.