Занятие №1.

7 класс. Делимость.

Устное домашнее задание. Решения

1. **Решение.**

   Так как 72=8*9, а 8 и 9 – взаимно простые числа, то искомое число должно делиться и на 8, и на 9.

   Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Сумма имеющихся цифр равна 4+2+4=10. Сумма оставшихся двух цифр не больше 18. Значит, чтобы сумма цифр искомого числа делилась на 9, нужно, чтобы сумма двух неизвестных цифр была равна 8 или 17 (тогда сумма цифр всего числа будет равна 18 и 27 соответственно).

   Если число делится на 8, то оно делится еще и на 2, и на 4. Значит, по признакам делимости, последняя цифра искомого числа должна быть четной, число 4* должно делиться на 4, число *4* должно делиться на 8.

   4* делится на 4, если последняя цифра равна 0, 4 или 8.

   Если последняя звездочка равна 0, а сумма звездочек равна 8 или 17, то первая звездочка равна 8 (сумма 17 в этом случае быть не может). Тогда последние три цифры образуют число 840, которое делится на 8. Значит, число 42840 является искомым.

   Если последняя звездочка равна 4, а сумма звездочек равна 8 или 17, то первая звездочка равна 4 (сумма 17 в этом случае быть не может). Тогда последние три цифры образуют число 444, которое не делится на 8. Значит, последняя цифра не равна 4.

   Если последняя звездочка равна 8, а сумма звездочек равна 8, то первая звездочка равна 0. Тогда последние три цифры образуют число 048, которое делится на 8. Значит, число 42048 является искомым.

   Если последняя звездочка равна 8, а сумма звездочек равна 17, то первая звездочка равна 9. Тогда последние три цифры образуют число 948, которое не делится на 8. Значит, первая звездочка не равна 9.

   Таким образом, получаем, что в разрядах сотен и единиц числа стоят либо 8 и 0, либо 0 и 8.

   Ответ: 8 и 0 или 0 и 8 (числа 42840 и 42048).

2. **Доказательство.**

   Так как уголок состоит из 5 клеток, а весь прямоугольник удалось разрезать на такие уголки, то площадь прямоугольника, выраженная в клетках, делится на 5.

   С другой стороны, площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон. Если произведение двух чисел делится на *простое число* 5, то хотя бы одно из этих чисел делится на 5. Значит, длина хотя бы одной стороны этого прямоугольника делится на 5.

   Доказано.

3. Доказательство.

Так как число $x+1$ делится на 3, то его можно представить в виде $x+1 = 3n$, где n – целое число.

Тогда $x = 3n–1$, а $7x+4 = 7*(3n–1)+4 = 21n–7+4 = 21n–3 = 3*(7n–1)$.

Так как n – это целое число, то $7n–1$ тоже целое. Обозначив $7n–1$ буквой m, получим, что число $7x+4 = 3m$. По определению делимости, это значит, что число $7x+4$ делится на 3.

Доказано.

4. Доказательство.

Так как числа $1+m$ и $34–n$ делятся на 11, то их можно представить в виде $1+m = 11p$, $34–n = 11q$, где p и q – целые числа.

Тогда $m = 11p–1$, $n = 34–11q$, а $m+n = 11p–1+34–11q= 11p+33–11q = 11*(p+3–q)$.

Так как p и q – это целые числа, то $p+3–q$ тоже целое. Обозначив $p+3–q$ буквой k, получим, что число $m+n = 11k$. По определению делимости, это значит, что число $m+n$ делится на 11.

Доказано.

5. Решение.

Среди чисел от 1 до 100 есть число 9. Поэтому произведение чисел от 1 до 100 делится на 9. Значит, сумма цифр этого произведения – число, делящееся на 9. А значит, сумма цифр этого числа тоже делится на 9. И так далее, после подсчета очередной суммы цифр получается число, делящееся на 9.

Так как в итоге получилось однозначное число, делящееся на 9, то это могли оказаться 0 или 9. Число 0 получиться не могло, так как это результат сложения цифр, а сумма цифр равна нулю только у числа 0 (а у Ильи изначально было гораздо большее число). Значит, получилось число 9.

Ответ: 9.

6. Доказательство.

Представим число в виде $10*n + k$, где n – количество целых десятков в числе, k – последняя цифра числа.

Число 10 делится на 5. Значит, $10*n$ делится на 5. Тогда, если k делится на 5, то и само число, равное $10*n + k$, делится на 5. Обратно, если само число, равное$10*n + k$, делится на 5, то k делится на 5 (иначе, если k не делится на 5, то и $10*n + k$ не делится на 5).

Таким образом, $10*n + k$ делится на 5 тогда и только тогда, когда k делится на 5, то есть последняя цифра числа равна 0 или 5. Это и требовалось доказать.

Доказано.

7. Решение.

225=9*25, числа 9 и 25 взаимно простые. Значит, чтобы число делилось на 225, оно должно делиться и на 25, и на 9.

Число делится на 25 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 00, 25, 50 или 75. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Чтобы число, состоящее из 1 и 0, делилось на 25 и на 9, оно должно состоять из кратного 9 количества цифр 1 и оканчиваться на 00.

Чтобы число было наименьшим, оно должно состоять из наименьшего количества цифр, а в более старших разрядах должны стоять как можно меньшие цифры.

Учитывая все вышесказанное, наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225, – это 11 111 111 100.

Ответ: 11 111 111 100.

8. Доказательство.

Заметим, что после того, как к трехзначному числу приписали число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, получилось число вида ABCCBA, где A, B и C – некоторые цифры.

Знакопеременная сумма цифр этого числа равна A–B+C–C+B–A=0, а значит, делится на 11. По признаку делимости, полученное число делится на 11.

Так как полученное число шестизначное и делится на 11 (то есть это не число 11), то оно является составным.

Доказано.