Занятие №1.
7 класс. Делимость.
Теория.

1. Основные понятия.

Натуральные числа – это числа, возникающие естественным образом при счёте (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и так далее). **Целые числа** – это все натуральные числа, а также все отрицательные числа, противоположные натуральным (-1, -2, - 3 и так далее), и число 0.

Делимость – это свойство целых чисел. Мы можем сказать, делится или не делится число 7 или -246 на 3, но нельзя говорить о делимости на 3 чисел $\frac{1}{2}$ или 5,025.

Говорят, что целое число a **делится** на натуральное число b, если найдется такое *целое* число n, что число a можно представить в виде $a=b*n$. Обозначение: $\boldsymbol{a \vdots b}$. Число a называют **кратным** числа b, число b называют **делителем** числа a. Заметим, что если b – делитель числа a, то и целое число n – также делитель числа a, то есть любой делитель числа имеет парный делитель, произведение с которым дает число a.

Пример.

Число 24 можно представить в виде произведения двух чисел так: 24=1*24=2*12=3*8=4*6. Значит, число 24 делится на 1, 24, 2, 12, 3, 8, 4 и 6.

Число 6k можно представить в виде произведения двух чисел так: 6k=1*6k=2*3k=3*2k. Значит, число 6k делится на 1, 6k, 2, 3k, 3, 2k.

Любое целое число a делится на 1 и на само себя, так как его можно представить в виде $a=1*a$.

Число 0 делится на любое натуральное число b, так как его можно представить в виде $0=b*0$.

Целое число называется **простым**, если оно имеет ровно два различных делителя – 1 и само это число. Если число имеет больше двух различных делителей, оно называется **составным**. **Число 1** имеет ровно один делитель и не является **ни простым, ни составным**.

Два числа называются **взаимно простыми**, если у них единственный общий делитель – число 1. Например, взаимно простыми являются числа 1 и 100, 15 и 32, 512 и 121.

2. Свойства делимости.

Утверждение 1.

Если число a делится на число b, то число a делится и на любой делитель числа b.

Доказательство.

Если число a делится на b, а число c – делитель числа b, то найдутся такие целые числа n и m, что $a=b*n$, $b=c*m$.

Тогда $a=b*n=(c*m)*n=c*(n*m)$. Произведение целых чисел $n*m$ – целое число. Обозначим это произведение буквой q, тогда $a=c*q$, где q –целое число. Согласно определению делимости, это значит, что число a делится на c.

Доказано.

Утверждение 2.

Если число a делится на b и на c, а числа b и c взаимно простые, то число a делится на произведение $b*c$.

Это важное утверждение мы пока используем без доказательства.

Если числа b и c не являются взаимно простыми, то число a может не делиться на их произведение. Например, число 12 делится на 4 и на 6, но не делится на 24.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.

Утверждение 3.

В таблице представлены основные свойства делимости суммы, разности и произведения двух чисел.

	$a \vdots m$ и $b \vdots m$	$a \vdots m$ и $b \not\vdots\, m$	$a \not\vdots\, m$ и $b \not\vdots\, m$
$a+b \vdots m?$	+	–	?
$a-b \vdots m?$	+	–	?
$a \cdot b \vdots m?$	+	+	?

1. Если числа a и b оба делятся на m, то их сумма и разность тоже делится на m.
2. Если хотя бы один из множителей делится на m, то произведение тоже делится на m.
3. Если одно из чисел a и b делится на m, а другое нет, то их сумма и разность не делится на m.
4. Если числа a и b оба не делятся на m, то их сумма, разность и произведение могут делиться или не делиться на m.

Доказательство.

Докажем следующие свойства. Остальные постарайтесь доказать самостоятельно по аналогии.

1. Если a делится на m и b делится на m, то $a+b$ делится на m.
   Действительно, если a делится на m и b делится на m, то найдутся такие целые числа p и q, что $a=m*p$ и $b=m*q$. Тогда $a+b=m*p+m*q=m*(p+q)$. Так как $p+q$ – это целое число, то, по определению делимости, a делится на m.
2. Если a делится на m, а b не делится на m, то $a+b$ не делится на m.
   Допустим, что это не так, то есть $a+b$ делится на m. Число b можно представить в виде разности $b=(a+b)–a$. По предположению, $a+b$ делится на m, по условию, a делится на m. Значит, разность этих чисел, равная b, делится на m, что противоречит тому, что b не делится на m. Значит, предположение неверно, и $a+b$ не делится на m.
3. Если a не делится на m и b не делится на m, то $a+b$ может делиться или не делиться на m.
   Пример: ни 2, ни 3 не делятся на 5, а 2+3 делится на 5; ни 2, ни 3 не делятся на 6, и 2+3 не делится на 6.

Доказано.

3. Признаки делимости.

1. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

   Доказательство. Рассмотрим число $\overline{abcde}$. Его можно представить в виде суммы некоторого количества десятков и цифры единиц $\overline{abcde} = \overline{abcd}*10 + e$. Число 10 делится на 2, значит, согласно свойствам делимости, произведение $\overline{abcd}*10$ делится на 2. Значит, опять же по свойствам делимости, число e и число $\overline{abcde}$ либо оба делятся, либо оба не делятся на 2. **Доказано.**
2. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0 или 5.
3. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3.

   Доказательство. Рассмотрим число $\overline{abcde}$. Найдем разность его и суммы его цифр. Для этого представим число в виде суммы разрядных слагаемых: $\overline{abcde} – (a+b+c+d+e) = (a*10000+b*1000+c*100+d*10+e) –(a+b+c+d+e) = a*(10000–1)+b*(1000–1)+c*(100–1)+d*(10–1)+e*(1–1) = 9999*a+999*b+99*c+9*e = 3*(3333*a+333*b+33*c+3*d)$. Получили, что разность числа и его суммы цифр всегда делится на 3. Согласно свойствам делимости, это значит, что само число и его сумма цифр либо оба делятся, либо оба не делятся на 3. **Доказано.**
4. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 9.
5. Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.
6. Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его двумя последними цифрами (в том же порядке), делится на 4.
7. Натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное его тремя последними цифрами (в том же порядке), делится на 8.

ООО "НТЛ "2х2" +7(831)2838848 www.nn2x2.ru все права защищены, копирование и распространение запрещено.