Занятие №1.
6 класс. Четность. Чередования.
Теория.

1. Основные понятия.

Натуральные числа – это числа, возникающие естественным образом при счёте (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и так далее). **Целые числа** – это все натуральные числа, а также все отрицательные числа, противоположные натуральным (-1, -2, - 3 и так далее), и число 0. На этом занятии мне не будем рассматривать отрицательные целые числа, хотя все приведённые ниже утверждения верны и для них.

Четность – это свойство целых чисел. Мы можем сказать, четным или нечетным является число 7 или -146, но нельзя говорить о четности чисел $\frac{1}{2}$ или 5,025.

Целое число называется **четным**, если оно делится на 2 без остатка. То есть это такое число, которое можно представить в виде суммы двух одинаковых *целых* чисел: $a=n+n$, где n – целое число. Если целое число не делится на 2 без остатка, то есть его нельзя представить в виде суммы двух одинаковых *целых* чисел, то оно называется **нечетным**.

Пример.

Число 56 можно представить в виде суммы двух одинаковых целых чисел: 56=28+28. Значит, 56 – четное число.

Число 125 можно представить в виде суммы двух одинаковых чисел, но эти числа не будут целыми: 125=62,5+62,5. Значит, 125 – нечетное число.

Число 0 – четное, так как его можно представить в виде суммы двух одинаковых целых чисел: 0=0+0.

Заметим, что запись $a=n+n$ означает, что $a=n*2=2*n=2+2+2+\ldots+2$ (сумма n двоек). Таким образом, можно сказать, что число является четным, если его можно представить в виде суммы некоторого количества двоек или в виде $2*n$, где n – целое число.

Признак четного числа: число является четным тогда и только тогда, когда его последняя цифра четная. Таким образом, чтобы определить, является ли число четным, достаточно посмотреть на его последнюю цифру.

Для краткости иногда обозначают четное число буквой Ч, а нечетное буквой Н.

2. Чередование четных и нечетных чисел.

Заметим, что число, которое на 1 больше четного числа, является нечетным. Действительно, если число a четное, то его можно представить в виде $a=n+n$, где n – целое число. Тогда число b, большее числа a на 1, можно представить в виде $b=n+n+1$. Так как 1 не делится на 2, то число b тоже нельзя разделить на 2, то есть нельзя представить в виде суммы двух одинаковых целых чисел.

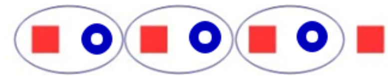
А вот число, которое на 2 больше четного числа (или на 1 больше нечетного числа), является четным. Действительно, если число a четное, то его можно представить в виде $a=n+n$, где n – целое число. Тогда число c, большее числа a на 2, можно представить в виде $c=n+n+2=n+n+1+1=(n+1)+(n+1)$. То есть число c тоже можно представить в виде суммы двух одинаковых целых чисел.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что в ряду целых чисел четные и нечетные числа чередуются: после четного числа всегда идет нечетное число, после нечетного – четное.

Чередование в ряд.

Если *объекты двух типов чередуются в ряд*,
то количество одних отличается от количества других *не более чем на 1*.

Действительно, если ряд начинается с объекта одного типа, а заканчивается объектом другого типа, то все объекты в ряду можно разбить на пары. В каждой паре объектов каждого типа поровну (по 1), значит, и во всем ряду их поровну и общее их количество четно.



Если же ряд начинается и заканчивается объектами одного типа,
то все объекты в ряду, кроме последнего, можно разбить на пары. Так как последний объект будет без пары, то объектов этого типа на 1 больше, чем объектов другого типа, и общее их количество нечетно.

Таким образом, если рассмотреть любую последовательность идущих подряд целых чисел, то четных и нечетных чисел в этой последовательности будет либо поровну, либо одних на 1 больше, чем других.

Задача 1.

Сколько четных и сколько нечетных чисел в ряду от 78 до 222?

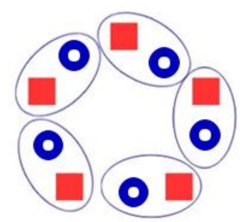
Решение.

Сначала сосчитаем, сколько всего чисел в этом ряду. Если бы мы рассматривали числа с 1 до 222, то их было бы 222. Но ряд начинается с 78, значит, первые 77 чисел мы не учитываем. В этом ряду всего 222–77=145 чисел.

Ряд начинается с четного числа и заканчивается четным числом, при этом четные и нечетные числа в ряду чередуются. Значит, все числа, кроме последнего, можно разбить на пары из четного и следующего за ним нечетного числа. Всего таких пар будет (145–1):2=72. В каждой паре есть одно четное и одно нечетное число. Значит, нечетных числе в ряду 72, а четных, с учетом оставшегося без пары последнего числа, 72+1=73.

Ответ: 73 четных и 72 нечетных.

Чередование по кругу.



Если *объекты двух типов чередуются по кругу*, то тех и других объектов в кругу *поровну*.

Действительно, в этом случае все объекты в круге можно разбить на пары. В каждой паре объектов каждого типа поровну (по 1), значит, и во всем круге их поровну и общее их количество четно.

3. Четность суммы и разности.

Итак, четное число – это число, которое можно представить в виде $2*n$, нечетное число – это число, которое можно представить в виде $2*m+1$, где n и m – целые числа. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1.

Число 1	Число 2	Сумма
ч	ч	ч
ч	н	н
н	н	ч

1. Сумма двух четных чисел четна.
2. Сумма четного и нечетного числа нечетна.
3. Сумма двух нечетных чисел четна.

Доказательство.

1. Пусть числа a и b четные, тогда $a=2*n$, $b=2*m$, где n и m – целые числа. Тогда сумма $a+b=(2*n)+(2*m)=n+n+m+m=(n+m)+(n+m)=2*(n+m)$, то есть может быть представлена в виде суммы двух одинаковых целых чисел $(n+m)$, а значит, является четной.
2. Пусть число a четное, а число b нечетное, тогда $a=2*n$, $b=2*m+1$, где n и m – целые числа. Тогда сумма $a+b=(2*n)+(2*m+1)=n+n+m+m+1=(n+m)+(n+m)+1=2*(n+m)+1$, то есть может быть представлена в виде суммы двух одинаковых целых чисел $(n+m)$ и единицы (то есть на 1 больше четного числа), а значит, является нечетной.

3. Пусть числа a и b нечетные, тогда $a=2*n+1$, $b=2*m+1$, где n и m – целые числа. Тогда сумма $a+b=(2*n+1)+(2*m+1)=n+n+1+m+m+1=(n+m+1)+(n+m+1)=2*(n+m+1)$, то есть может быть представлена в виде суммы двух одинаковых целых чисел $(n+m+1)$, а значит, является четной.

Доказано.

Как видим, сумма двух чисел нечетна только тогда, когда слагаемые имеют разную четность. Если два числа имеют одинаковую четность, то их сумма четна.

Следствие 1.

Четные слагаемые не влияют на четность суммы. Каждое нечетное слагаемое меняет четность суммы.

Действительно, как можно видеть в таблице, если одно из слагаемых четное, то сумма имеет такую же четность, как и второе слагаемое. А если одно из слагаемых нечетное, то сумма имеет четность, противоположную четности второго слагаемого.

Следствие 2.

Сумма двух чисел имеет такую же четность, как и их разность.

Действительно, сумму двух чисел можно представить в виде суммы разности этих чисел и удвоенного второго слагаемого: $a+b = a–b+b+b = (a–b)+2*b$. $2*b$ – это четное число. Значит, $(a+b)$ имеет такую же четность, как и $(a–b)$ (см. следствие 1).

Задача 2.

В чаще леса на поляне по кругу растет 13 мухоморов. Может ли сумма точек на шляпках у любых двух соседних мухоморов отличается ровно на 13?

Решение.

Предположим, что такое возможно, и у любых двух соседних мухоморов разность количества точек на шляпках равна 13, то есть нечетному числу. Так как разность двух чисел нечетна, то эти числа разной четности.

Значит, если в любой паре соседних мухоморов на одном четное количество точек, а на другом нечетное, то мухоморы с четным и нечетным количеством точек в круге чередуются. Но тогда тех и других мухоморов в круге поровну, а общее их количество четно. Это противоречит тому, что всего их 13.

Значит, предположение неверно, и не может быть такого, что сумма точек на шляпках у любых двух соседних мухоморов отличается ровно на 13.

Ответ: не может.

Следствие 3.

1. *Сумма любого количества четных чисел четна.* Действительно, каждое четное слагаемое не меняет четности всей суммы. Так как ни одного нечетного слагаемого нет, то и вся сумма четная.
2. *Сумма четного количества нечетных чисел четна.* В этом случае все нечетные числа можно разбить на пары, в каждой паре сумма будет четной, а значит, и сумма этих сумм тоже будет четной.
3. *Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.* В этом случае все нечетные числа, кроме одного, можно разбить на пары, в каждой паре сумма будет четной, а значит, и сумма этих сумм тоже будет четной. Но оставшееся без пары нечетное число меняет четность суммы, так как Ч+Н=Н.

Можно подвести итог всего вышесказанного: *четность выражения с «+» и «–» зависит только от четности количества нечетных чисел в этом выражении*. Если нечетных чисел нечетное количество, то значение выражения нечетно. Если нечетных чисел четное количество, то значение выражения четно.

Задача 3.

Вася записал в ряд цифры своей даты рождения: 2 7 1 1 2 0 0 8. Теперь он хочет расставить между всеми цифрами плюсы и минусы так, чтобы получить свой возраст – 12. Сможет ли Вася это сделать?

Решение.

Среди выписанных Васей чисел есть 5 четных и 3 нечетных. Четные слагаемые не влияют на четность значения выражения. Нечетных чисел 3, то есть *нечетное количество*. Значит, значение всего выражения при любой расстановке плюсов и минусов будет *нечетным*. 12 – это четное число, Вася не сможет его получить.

Ответ: не сможет.

4. Четность произведения.

Число 1	Число 2	Произ-ведение
Ч	Ч	Ч
Ч	Н	Ч
Н	Н	Н

Утверждение 2.

1. Произведение двух четных чисел четно.
2. Произведение четного и нечетного числа четно.
3. Произведение двух нечетных чисел нечетно.

Доказательство.

1, 2. Пусть число a четное, а число b четное или нечетное, тогда произведение $a*b=a+a+...+a$, то есть оно равно сумме b слагаемых, равных четному числу a. Как мы выяснили выше, сумма любого количества четных чисел четна.

3. Пусть числа a и b нечетные, тогда произведение $a*b=a+a+...+a$, то есть оно равно сумме b слагаемых, равных нечетному числу a. Как мы выяснили выше, сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.

Доказано.

Как видим, произведение двух чисел нечетно только тогда, когда оба множителя нечетны. Если хотя бы один из множителей четный, то и все произведение четно. Этот вывод можно обобщить и на любое количество множителей.

Задача 4.

Маша сложила два числа, а Саша перемножил эти же числа. У ребят получились результаты одинаковой четности. Какие были эти два числа – четные или нечетные?

Решение.

Посмотрим в таблицы выше.

Если оба числа четные, то Ч+Ч=Ч и Ч*Ч=Ч. В этом случае сумма и произведение имеют одинаковую четность.

Если оба числа нечетные, то Н+Н=Ч и Н*Н=Н. В этом случае сумма и произведение имеют разную четность.

Если одно число четное, а другое нечетное, то Ч+Н=Н и Ч*Н=Ч. В этом случае сумма и произведение имеют разную четность.

Таким образом, результаты одинаковой четности ребята могли получить только в случае, когда оба числа четные.

Ответ: оба числа четные.