Занятие номер	Класс	Тема	Дата
5	6 профи	Принцип Дирихле. Часть 4.	17.10.20

1. **Решение.**

   а) Пусть конкурсантов N человек, они получили 1, 2, … N конфет. Сумма полученных конфет равна N*(N+1):2 (используем метод Гаусса). По условию задачи имеется 70 конфет. Можем составить неравенство:

   $N*(N+1):2 \le 70$, или $N*(N+1) \le 140$.

   Найдем наибольшее число N, при котором это неравенство выполняется. Перебрав несколько вариантов чисел, находим, что наибольшее N=11.

   При 12 и больше конкурсантов 70 конфет не получится раздать так, что все получат разное количество конфет. Действительно, если бы это было возможно для 12 конкурсантов, то они получили бы, как минимум, 1, 2, 3,…, 12 конфет, сумма этих конфет равна 12*(12+1):2=78, это противоречит условию задачи.

   При 11 конкурсантах можно раздать конфеты так, что все получит разное количество: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15.

   б) В случае, когда каждому конкурсанту нужно выдать не менее 3 конфет, конкурсанты получат, как минимум 3, 4, 5, …, N+2 конфет, а неравенство будет таким:

   $N*(N+2+3):2 \le 70$, или $N*(N+5) \le 140$.

   Методом подбора находим, что наибольшее N, при котором выполняется неравенство, равно 9. При $N \ge 10$ сумма конфет будет не меньше 10*(10+5):2=75, что противоречит условию задачи.

   Ответ: 11, 9.

2. **Доказательство.**

   Предположим, что это не так: во всех клетках сидит разное количество кроликов. Так как клеток всего n, то наименьшее количество кроликов по клеткам – это 0, 1, … , n-1.

   Тогда общее количество всех кроликов *не меньше*, чем n(n-1)/2, что противоречит условию задачи.

   Значит, предположение неверно, и найдутся две клетки с одинаковым количеством кроликов.

   Доказано.

3. **Доказательство.**

Заметим, что при возведении семерки в степени 3, 4, 5, 6 и так далее, в результате получается число, состоящее не менее, чем из 3 цифр, а последние две цифры будут циклически повторяться: 43, 01, 07, 49, 43, 01, 07, 49, …

Предположим, что не существуют две различные степени семерки такие, что три их последние цифры совпадают. Тогда, так как вариантов последних двух цифр всего 4, а третья справа цифра может быть от 0 до 9 (10 вариантов), то всего получаем не более 4*10=40 вариантов последних трёх цифр для степеней семерки. Значит, и степеней семерки не более 40. Это противоречит тому, что степеней семерки – бесконечное множество.

Доказано.

4. **Доказательство.**

Предположим, что это не так: у любых двух знакомых спортсменов номера начинаются с разных цифр. Так как номер может начинаться с одной из 9 цифр (от 1 до 9), то разобьем всех спортсменов на 9 групп, в каждой из которых номера спортсменов начинаются с одной и той же цифры. По нашему предположению в каждой группе спортсмены между собой не знакомы, а знакомые между собой спортсмены находятся в разных группах.

Так как спортсменов 100, а групп 9, то найдется хотя бы одна группа, в которой не менее 12 спортсменов (иначе спортсменов не более 9*11=99). И в этой группе все спортсмены не знакомы между собой. Но это противоречит условию задачи о том, что среди любых 12 из них найдутся двое знакомых между собой.

Значит, предположение неверно, и найдутся два знакомых спортсмена, номера которых начинаются с одинаковой цифры.

Доказано.

6 профи. Принцип Дирихле. Часть 5.

5. **Доказательство.**

   Так как школьников 11, а классов 4, то найдется класс, представителей которого не более 2 человек. Действительно, если это не так, и представителей каждого класса 3 и больше, то всего школьников не меньше 3*4=12, а их всего 11.

   Если из какого-то класса присутствует только 1 представитель, то среди оставшихся 10 человек будут представители только трех классов, и они будут сидеть за столом подряд. Значит, в этом случае нельзя школьников рассадить за стол указанным образом (если бы было можно, то школьников было бы не более 5, а их 11).

   Если из какого-то класса присутвует ровно 2 представителя, то за столом между ними будет 2 промежутка. Представителей остальных трех классов всего 9, и найдется промежуток, в котором сидит не менее 5 из них (в противном случае, если в каждом промежутке их не более 4, то всего их не более 8). Значит, в любом случае найдется 5 подряд сидящих представителей только трех классов.

   Таким образом, эти 11 человек нельзя рассадить за столом так чтобы среди любых 5 сидящих подряд школьников были представители каждого класса.

   Доказано.

6. **Доказательство.**

   Предположим, что это не так: сумма любых трех подряд стоящих чисел меньше 36. Рассмотрим все тройки идущих подряд чисел (1-е, 2-е, 3-е числа в круге, 2-е, 3-е, 4-е числа, 3-е, 4-е, 5-е числа, и так далее). Всего таких троек будет 23. Сложим суммы чисел в этих тройках. По нашему предположению, эта сумма *меньше* 23*36=828.

   С другой стороны, при таком суммировании каждое число в круге мы посчитали трижды, и значит, эта сумма равна утроенной сумме всех чисел в круге, то есть *равна* 3*23*(23+1):2=828.

   Получили противоречие. Значит, предположение неверно, и найдутся такие три стоящих подряд числа, что их сумма не меньше 36.

   Доказано.

7. **Доказательство.**

   Если среди 10 чисел есть число, делящееся на 10, то задача решена.

   Если такого числа нет, то докажем, что сумма некоторых из них делится на 10.

   Обозначим эти 10 чисел так: a1, a2, … a10.

Рассмотрим такие суммы:

$a1, \quad a1 + a2, \quad a1 + a2 + a3, \quad \ldots, \quad a1 + a2 + \ldots + a10.$

Если одна из этих сумм делится без остатка на 10, то задача решена.

Если ни одна из этих сумм не делится без остатка на 10, то найдутся две суммы с одинаковыми остатками от деления на 10. Действительно, вариантов остатков от деления всего 9 (от 1 до 9), а рассматриваемых сумм 10. Разность сумм с одинаковыми остатками от деления представляет собой сумму некоторых из этих 10 чисел (например, разность сумм $a1+a2+a3+a4$ и $a1+a2$ равна $a3+a4$) и делится на 10 без остатка.

Доказано.