Занятие номер	Класс	Тема	Дата
3	6 база	Рыцари и лжецы	03.10.2020

1. **Решение.**

   Тот, кто сказал это утверждение, не может быть лжецом, так как в этом случае его утверждение будет правдой. Значит, он рыцарь. Тогда его утверждение – правда, и один из них лжец. Но так как первый рыцарь, то лжец – второй.

   Ответ: первый – рыцарь, второй – лжец.

2. **Решение.**

   «Мы все лжецы» мог сказать только лжец, значит, *первый – лжец*.

   Если второй – лжец, то его утверждение ложно, и среди островитян не один рыцарь. Но если третий рыцарь, то утверждение второго истинно (так как в этом случае первый и второй лжецы, а третий рыцарь), а лжец не может говорить правду. Если же третий лжец, то утверждение первого истинно (так как в этом случае все трое лжецы), а лжец не может говорить правду. Таким образом, если второй лжец, то получаем противоречие. Значит, *второй – рыцарь*.

   Так как второй рыцарь, то он говорит правду, и среди них ровно один рыцарь – он сам. Значит, *третий – лжец*.

   Ответ: первый и третий – лжецы, второй – рыцарь.

3. **Решение.**

   «Мы все лжецы» мог сказать только лжец, значит, *первый – лжец*.

   Если *второй – рыцарь*, то его утверждение истинно, и среди островитян ровно один лжец, и это, как мы выяснили, первый. Тогда *третий – рыцарь*.

   Если *второй – лжец*, то его утверждение ложно, и среди островитян не один лжец. Если при этом еще и третий – лжец, то утверждение первого истинно (так как все трое лжецы), а лжец не может говорить правду. Если *третий рыцарь*, то противоречия нет.

   Таким образом, возможны две ситуации:

   1) Первый – лжец, второй и третий – рыцари.

   2) Первый и второй – лжецы, третий – рыцарь.

   Точно можно сказать, что в обоих случаях первый – лжец, третий – рыцарь.

   Ответ: про первого (лжец) и третьего (рыцарь).

4. **Решение.**

Первым в очереди стоит лжец, так как перед ним никто не стоит, а он утверждает: «Прямо передо мной стоит лжец», значит, он лжет.

За ним стоит человек, который утверждает то же самое, но в этом случае утверждение «Прямо передо мной стоит лжец» верно. Значит, вторым стоит рыцарь.

Далее снова стоит лжец, так как его утверждение будет неверным.

Затем снова рыцарь. И так далее.

Лжецы и рыцари в очереди чередуются. Так как их всего 2020 (четное число), и первым стоит лжец, то 2020-м в очереди будет рыцарь.

Ответ: рыцарь.

5. **Решение.**

Слева и справа от Артура стоят лжецы, так как между ними и Артуром нет никого, и их утверждение будет ложным:

… … … … … Л А Л … … … … …

Слева от левого лжеца и справа от правого лжеца стоят лжецы, так как между ними и Артуром стоят по одному лжецу, и их утверждение будет ложным:

… … … … Л Л А Л Л … … … …

Дальше слева и справа стоят рыцари, так как между каждым из них и Артуром – ровно по 2 лжеца, и их утверждение будет истинным:

… … … Р Л Л А Л Л Р … … …

Далее, по той же причине, слева и справа будут стоять только рыцари:

… … Р Р Р Л Л А Л Л Р Р Р … …

Таким образом, в очереди будет ровно 4 лжеца, если Артур стоит где-то в середине очереди.

Возможны также такие варианты расположения рыцарей и лжецов:

Л Л А Л Л Р Р Р …
Л А Л Л Р Р Р …
А Л Л Р Р Р …
… Р Р Р Л Л А
… Р Р Р Л Л А Л
… Р Р Р Л Л А Л Л

Как видим, во всех случаях количество лжецов в очереди будет равно 2, 3 или4.

Ответ: 2, 3 или 4 лжеца.

6. Решение.

Так как у каждого человека в комнате есть только 1 знакомый и знакомства взаимны, то всех людей в комнате можно разбить на пары знакомых друг с другом. Всего будет 8:2=4 такие пары.

Заметим, что фразу «Мой знакомый — лжец!» может сказать только рыцарь про лжеца или лжец про рыцаря. Значит, каждая пара знакомых – это рыцарь и лжец. Так как пар всего 4, то в комнате находятся 4 рыцаря и 4 лжеца.

Ответ: 4 рыцаря и 4 лжеца.

7. Решение.

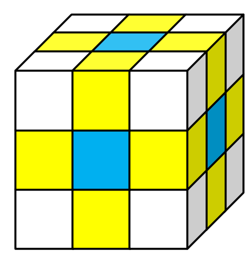
Утверждения жителей В и С таковы, что не могут быть одновременно истинными или одновременно ложными. Действительно, если В сказал правду, то С солгал. А если В солгал, то С сказал правду. Значит, один из них рыцарь, другой – лжец.

Предположим, что В – рыцарь, а С – лжец. Тогда утверждение «А сказал, что среди нас один рыцарь» верное. И житель А действительно так сказал. Но если А – рыцарь, то его утверждение ложно (так как В тоже рыцарь, всего рыцарей двое), а это невозможно. Если А – лжец, то его утверждение истинно (так как В – один рыцарь, а А и С – лжецы), что тоже невозможно.

Получили противоречие. Значит, предположение неверно. Поэтому В – лжец, а С – рыцарь.

Ответ: В – лжец, С – рыцарь.

8. Решение.



У жильцов квартир, находящихся в углах куба, есть ровно 3 соседа (так как угловые кубики соприкасаются с другими кубиками тремя гранями). 3 – нечетное число, нацело пополам не делится. Поэтому утверждение «Среди моих соседей ровно половина — лжецы» из уст жильцов этих квартир является ложью. В угловых квартирах живут лжецы.

Рассмотрим квартиры, отмеченные голубым цветом. У жильцов этих квартир – по 5 соседей. 5- нечетное число, нацело пополам не делится. Поэтому утверждение «Среди моих соседей ровно половина — лжецы» из уст жильцов этих квартир является ложью. В голубых квартирах живут лжецы.

Рассмотрим квартиры, отмеченные желтым цветом. У жильцов каждой из этих квартир – по 4 соседа, причем 2 из них – жильцы угловых квартир (лжецы) и 2 – жильцы голубых квартир (тоже лжецы). Поэтому утверждение «Среди моих соседей ровно половина — лжецы» из уст жильцов этих квартир является ложью. В желтых квартирах живут лжецы.

Рассмотрим центральную квартиру (на рисунке ее не видно). У жильца этой квартиры – 6 соседей (голубые кубики), и все они являются лжецами. Значит, утверждение «Среди моих соседей ровно половина — лжецы» из уст жильца центральной квартиры является ложью. В центральной квартире живет лжец.

Получаем, что во всех квартирах (их 27) живут лжецы.

Ответ: лжецы, 27 лжецов.

9. Решение.

Заметим, что все 4 островитянина лжецами быть не могут, так как трое из них будут говорить правду.

Рассмотрим 4-го островитянина, который утверждает «Среди нас нет лжецов». Если он рыцарь, то его утверждение истинно, и остальные трое – тоже рыцари. Но остальные трое утверждают, что лжецы среди них есть, значит, говорят неправду. Получили противоречие. Значит, *4-й островитянин – лжец*.

Заметим, что если 3-й островитянин говорит правду, то правдой являются также утверждения 2-го и 1-го островитян. То есть, если 3-й рыцарь, то и все, кто перед ним, тоже рыцари.

Если 3-й рыцарь, то 1-й и 2-й тоже рыцари – всего 3 рыцаря и 1 лжец. Но тогда 3-й и 2-й говорят неправду. Значит, *3-й – лжец*.

Если 2-й рыцарь, то 1-й тоже рыцарь – всего 2 рыцаря и 2 лжеца, и противоречия утверждениям островитян нет. Значит, *2-й может быть рыцарем*.

Если 2-й лжец, а 1-й рыцарь, то всего будет 1 рыцарь и 3 лжеца. Но тогда получается, что 2-й и 3-й говорят правду, а они лжецы. Значит, *2-й быть лжецом не может*.

Таким образом, противоречия не возникает только в ситуации, когда 1-й и 2-й островитяне – рыцари, а 3-й и 4-й – лжецы.

Решим задачу для n островитян.

Из предыдущего решения мы можем сделать выводы:

1) все n островитян лжецами быть не могут,

2) n-й островитянин – лжец,

3) 1-й островитянин – рыцарь,

4) если островитянин с номером k – рыцарь, то все островитяне с номерами меньше k – рыцари,

5) если островитянин с номером k – лжец, то все островитяне с номерами больше k – лжецы.

Пусть n – четное число.

Тогда n можно представить в виде суммы двух половин $n=m+m$.

Рассмотрим островитянина *с номером* m.

Если он лжец, то лжецы и все следующие за ним островитяне. Значит, лжецов, как минимум, m+1 (половина и сам этот островитянин). Но тогда островитянин с номером m+1 говорит правду, а это невозможно, так как он лжец. Значит, *островитянин с номером* m *– не лжец.*

Если островитянин с номером m – рыцарь, то рыцари – все, кто впереди него. Тогда лжецов будет максимум m, и это не противоречит утверждению островитянина с номером m. То есть такая ситуация возможна, *островитянин с номером* m *– рыцарь*.

Рассмотрим островитянина *с номером* $m+1$.

Если он рыцарь, то рыцари все, кто перед ним. Тогда всего рыцарей, как минимум, m+1, а лжецов максимум m–1. Тогда рыцари с номерами m и m+1 говорят неправду, а это невозможно. Значит, *островитянин с номером* $m+1$ *– не рыцарь*.

Если островитянин с номером m+1 – лжец, то лжецы все, кто стоит за ним. А стоящий впереди него островитянин с номером m – рыцарь, как мы доказали выше. Значит, лжецов максимум m, и это не противоречит утверждению лжеца с номером m+1 (ведь он утверждает, что лжецов минимум m+1, и это неправда). То есть такая ситуация возможна, *островитянин с номером* $m+1$ *– лжец.*

Таким образом, в случае четного числа островитян первая половина – рыцари, вторая половина – лжецы.

Пусть n – нечетное число.

Тогда n можно представить в виде $n=m+m+1$.

Рассмотрим островитянина *с номером* $m+1$ – он стоит посередине.

Если он рыцарь, то рыцари все, кто стоит перед ним. Значит, рыцарей, как минимум, m+1. Тогда лжецов будет максимум m. Тогда выходит, что рыцарь с номером m+1 говорит неправду (ведь он утверждает, что лжецов минимум m+1). Получили противоречие. Значит, *островитянин с номером* $m+1$ *– не рыцарь*.

Если островитянин с номером m+1 – лжец, то лжецы все, кто стоит после него. Значит, лжецов, как минимум, m+1. Тогда выходит, что лжец с номером m+1 говорит правду (ведь он утверждает, что лжецов минимум m+1). Получили противоречие. Значит, *островитянин с номером* $m+1$ *– не лжец*.

Получилось, что островитянин с номером m+1 не может быть ни рыцарем, ни лжецом. Значит, в случае нечетного n задача решения не имеет.

Ответ: 1-й и 2-й – рыцари, а 3-й и 4-й – лжецы; в случае четного n первые n/2 – рыцари, остальные – лжецы; в случае нечетного n задача решения не имеет.

10.Решение.

Рассмотрим 1-го островитянина. Если он рыцарь, то его утверждение ложно. А рыцарь лгать не может. Значит, *1-й – лжец*.

Рассмотрим 4-го островитянина. Так как 1-й лжец, то даже если все остальные рыцари, рыцарей не более трех. Значит, *4-й – рыцарь*, так как говорит правду.

Если 2-й островитянин рыцарь, то его утверждение ложно (так как есть еще один рыцарь – 4-й), а рыцарь лгать не может. Значит, *2-й – лжец*.

Так как 1-й и 2-й островитяне – лжецы, то даже если остальные двое рыцари, то рыцарей не более двух. Значит, *3-й – рыцарь*, так как говорит правду.

Таким образом, 1-й и 2-й островитяне – лжецы, а 3-й и 4-й – рыцари.

Решим задачу для n островитян.

Из предыдущего решения мы можем сделать выводы:

1) 1-й островитянин – лжец,

2) n-й островитянин – рыцарь,

3) если островитянин с номером k – рыцарь, то все островитяне с номерами больше k – рыцари,

4) если островитянин с номером k – лжец, то все островитяне с номерами меньше k – лжецы.

<u>Пусть n – четное число.</u>

Тогда n можно представить в виде суммы двух половин $n=m+m$.

Рассмотрим островитянина *с номером* m.

Если он рыцарь, то рыцари и все следующие за ним островитяне. Значит, рыцарей, как минимум, m+1 (половина и сам этот островитянин). Но тогда островитянин с номером m+1 лжет (он говорит, что рыцарей не более m), а рыцарь лгать не может. Значит, *островитянин с номером* m *– лжец*. И все, кто перед ним, тоже лжецы.

Рассмотрим островитянина *с номером* $m+1$.

Если он лжец, то лжецы все, кто перед ним. Тогда рыцарей не более m–1. Но тогда островитянин с номером m+1 говорит правду (он говорит, что рыцарей не более m–1), а лжец правду говорить не может. Значит, *островитянин с номером* $m+1$ *– рыцарь*. И все, кто после него, тоже рыцари.

Таким образом, в случае четного числа островитян первая половина – лжецы, вторая половина – рыцари.

<u>Пусть n – нечетное число.</u>

Тогда n можно представить в виде $n=m+m+1$.

Рассмотрим островитянина *с номером m+1* – он стоит посередине.

Если он рыцарь, то рыцари все, кто стоит после него. Значит, рыцарей, как минимум, m+1. Но тогда островитянин с номером m+1 лжет (он говорит, что рыцарей не более m), а рыцарь лгать не может. Значит, *островитянин с номером m+1 – не рыцарь*.

Если он лжец, то лжецы все, кто стоит перед ним. Значит, рыцарей не более m. Но тогда островитянин с номером m+1 говорит правду (он говорит, что рыцарей не более m), а лжец говорить правду не может. Значит, *островитянин с номером m+1 – не лжец*.

Получилось, что островитянин с номером m+1 не может быть ни рыцарем, ни лжецом. Значит, в случае нечетного n задача решения не имеет.

Ответ: 1-й и 2-й – лжецы, а 3-й и 4-й – рыцари; в случае четного n первые n/2 – лжецы, остальные – рыцари; в случае нечетного n задача решения не имеет.