6 профи. НОД и НОК. Часть 2.

1. **Решение.**

   Допустим, что числа n и n+1 имеют общий делитель d>1. Тогда, так как каждоt из этих чисел делится на d, то и разность этих чисел делится на d. Но разность этих чисел равна (n+1)-n=1 и делится только на 1.

   Значит, числа n и n+1 имеют единственный общий делитель, равный 1. НОД (n, n+1)=1.

   Ответ: 1.

2. **Решение.**

   Число 1000 можно представить в виде произведения двух чисел таким образом:

   1000=1*1000=2*500=4*250=5*200=8*125=10*100=20*50=25*40.

   НОД этих чисел в этих случаях равен 1, 2, 2, 5, 1, 10, 10, 5 соответственно.

   Наибольшее возможное значение НОД двух чисел, произведение которых равно 1000, - это 10.

   Ответ: 10.

3. **Решение.**

   Пусть на острове Невезения в сутках n часов, в часе m минут, а в минуте k секунд.

   Тогда n*m=77, m*k=91, откуда понятно, что m – это общий делитель чисел 77 и 91.

   Делители числа 77 – это 1, 7, 11, 77. Делители числа 91 – это 1, 7, 13, 91.

   Значит, m=7. Тогда n=11, k=13. То есть на острове в сутках 11 часов, в часе 7 минут, в минуте 13 секунд.

   Всего в сутках 11*7*13=1001 секунда.

   Ответ: 1001 секунда.

4. **Доказательство.**

   Пусть даны натуральные числа a и b, причем a>b.

   Обозначим их НОД буквой d, тогда их НОК равен 27d.

   Числа a и b можно представить в виде: a=d•n, b=d•k, где n и k – взаимно простые числа (обсуждалось на теории), причем n>k. Тогда $a•b=d^2•n•k$.

   С другой стороны, произведение чисел a и b равно произведению их НОД и НОК (обсуждалось на теории): $a•b=d•27d=27d^2$.

   Из равенства $d^2•n•k=27d^2$ получаем, что n•k=27.

   Так как 27=1•27=3•9, а числа n и k – взаимно простые, и n>k, то n=27, k=1.

   Тогда a=27d, b=d, отсюда получаем, что a=27b, а это значит, что a делится на b.

   Доказано.

5. **Доказательство.**

Пусть даны натуральные числа a и b, причем $a>b$.

Обозначим их НОД буквой d, тогда их НОК равен 75d.

Числа a и b можно представить в виде: $a=d\cdot n$, $b=d\cdot k$, где n и k – взаимно простые числа (обсуждалось на теории), причем $n>k$. Тогда $a\cdot b=d^2\cdot n\cdot k$.

С другой стороны, произведение чисел a и b равно произведению их НОД и НОК (обсуждалось на теории): $a\cdot b=d\cdot 75d=75d^2$.

Из равенства $d^2\cdot n\cdot k=27d^2$ получаем, что $n\cdot k=75$.

Так как $75=1\cdot 75=3\cdot 25=5\cdot 15$, а числа n и k – взаимно простые, и $n>k$, то $n=75$, $k=1$ или $n=25$, $k=3$. Рассмотрим оба эти случая.

В первом случае $a=75d$, $b=d$, отсюда получаем, что $a=75b>8b$.

Во втором случае $a=25d$, $b=3d$, отсюда получаем, что $a>24d=8\cdot(3d)=8b$, то есть $a>8b$.

Доказано.

6. **Доказательство.**

Разложим на простые множители все НОДы:

НОД (a, b) = 175 $=5^2\cdot 7$.

НОД (a, c) = 225 = $3^2\cdot 5^2$.

НОД (b, c) = 65 = $5\cdot 13$.

Так как 5^2 входит в НОД (a, b) и в НОД (a, c), то 5^2 входит в разложение на простые множители чисел a, b и c. Но тогда 5^2 должно входить в НОД (b, c), а в него входит только 5. Получили противоречие. Значит, Петя где-то ошибся.

Доказано.